

2023 - 2024 年度 中五級第三學期考試
數學科 延伸部分 (卷一)

MCDH 23-24 F5 Final M1

姓名：_____

日期：2024 年 6 月 17 日

班別：_____ 班號：_____

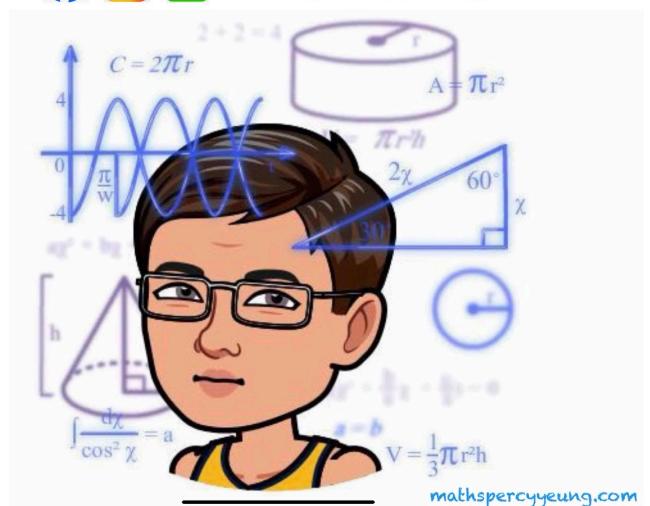
時間：上午 8:30 - 上午 11:00 (2 小時 30 分鐘)

滿分：100

試題答題簿

考生須知：

1. 本試卷分兩部，即甲部和乙部。
2. 本試卷各題均須作答。
3. 除特別指明外，須詳細列出所有算式。
4. 除特別指明外，數值答案須用真確值，或四位小數的近似值表示。
5. 本試卷的附圖不一定依比例繪成。



甲部 (50 分)

1. 下表顯示一離散隨機變量 X 的概率分佈，其中 p 及 q 都是常數：

x	1	4	6
$P(X=x)$	p	q	0.3

已知 $\text{Var}(X) = 3$ 。求 p 、 $E(5X^2)$ 及 $\text{Var}(5X + 12)$ 。

(6 分)

2. 設 A 及 B 為兩事件。將 A 及 B 的互補事件分別記為 A' 及 B' 。假定 $P(A \cap B) = 0.385$ 及 $P(A' | B) = 1.5 P(B')$ 。

(a) 求 $P(B)$ 。

(b) 若 $P(A \cup B) = 0.915$ ，求 $P(A')$ 。

(6 分)

3. 某足球隊在一場比賽中表現良好的概率是 0.25。若該隊在一場比賽中表現良好，該隊勝出該場比賽的概率是 0.3。已知該隊未能勝出一場比賽的概率是 0.88。

- (a) 已知該隊在某場比賽中表現並不良好，求該隊勝出該場比賽的概率。
 - (b) 已知該隊勝出某場比賽，求該隊在該場比賽中表現並不良好的概率。
 - (c) 求該隊首次勝出一場比賽前已進行的比賽數目的平均值。

(6 分)

4. 一枚不勻稱硬幣有兩面：「正面」及「反面」。當投擲該硬幣一次時，得出「正面」及「反面」的概率分別是 u 及 v ，其中 $u < v$ 。在一遊戲中，玩家每一回合投擲該硬幣 5 次。當玩家在一回合中擲得至少 4 次「正面」時，可獲得現金券，而遊戲便結束。已知在一回合中擲得「正面」的數目的方差是 1.178。

- (a) 求 u 的值。
 - (b) 若玩家在每一回合需支付 \$10，而現金券價值 \$100，該遊戲的每一回合對玩家是否有利？試解釋你的答案。
 - (c) 至少需要多少個回合，才使得獲得現金券的概率大於 0.5？

(7 分)

5. (a) 依 x 的升幕次序展開 e^{-14x} 至含 x^2 的項為止。
 (b) 設 a 為一實數。若 $e^{-14x}(2+ax)^4$ 的展式中 x^2 的係數是 440，求 a 的所有可能值。

(6分)

6. 考慮曲線 $C : y = (2 + x) \ln x - (\ln x)^2$ ，其中 $x > 0$ 。

(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ 。

(b) 已知 C 在 $x = \beta$ 的切線的斜率是 2。某人宣稱 β 只有一個可能值。你是否同意？試解釋你的答案。

(6 分)

7. 考慮曲線 $C : y = a^x - 2^{x+a} + 48$ ，其中 a 為一正常數。 C 與 y 軸相交於 $(0, 33)$ 。

 - (a) 求 a 的值。
 - (b) 求 C 的兩個 x 截距。如有需要，答案以 $\frac{\ln p}{\ln q}$ 的形式表示。
 - (c) 求 C 與 x 軸圍成的區域的面積之真確值，答案以 $\ln 2$ 及 $\ln 3$ 表示。

(6分)

$$8. \text{ 設 } f(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}\right), \text{ 其中 } -1 < x < 0.$$

- (a) 求 $f'(x)$ 。

(b) 利用代換積分法，求 $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+1}} dx$ 。

(c) 由此，求 $\int \frac{x^3 - x - 1}{x\sqrt{x+1}} dx$ 。

(7 分)

乙部 (50 分)

9. 在一古董店中，每天的顧客人數依循一平均值為 λ 的泊松分佈。每位顧客在該店的消費金額依循一平均值為 \$8\,500 及標準差為 \$2\,000 的正態分佈。某天該店沒有顧客的概率是 0.060 81。

- (a) (i) 求 λ 的值，準確至一位小數。
(ii) 求一位顧客在該店消費多於 \$10\,000 的概率。

(4 分)

- (b) 若某天有至少 2 位顧客在該店各消費多於 \$10\,000，當天稱為理想日。

- (i) 若某天有 4 位顧客，求該天是理想日的概率。
 - (ii) 求某天有 3 位顧客且該天是理想日的概率。
 - (iii) 已知某天有至多 4 位顧客且該天是理想日，求

(8分)

10. 在某客戶服務中心中，每分鐘內所接聽的來電數目依循一平均值為 3.5 的泊松分佈。假設不同分鐘內所接聽的來電數目相互獨立。該客戶服務中心在某一分鐘的狀態會根據在該一分鐘內所接聽的來電數目界定，下表顯示分級制度。

在一分鐘內所接聽的來電數目	少於 2	2 或 3	4 或以上
狀態	空閒	正常	繁忙

- (a) 求該客戶服務中心在某一分鐘處於空閒狀態的概率。 (2 分)

(b) 求該客戶服務中心在某一分鐘處於繁忙狀態的概率。 (2 分)

(c) 求該客戶服務中心在某一小時內所接聽的來電數目的期望值。 (2 分)

(d) 某主管研究該客戶服務中心在某日開始營業的第 1 分鐘、第 2 分鐘、第 3 分鐘、第 4 分鐘及第 5 分鐘的狀態，並視這些分鐘為 5 個時段。

(i) 求該客戶服務中心恰好在 2 個時段處於繁忙狀態及至多在 2 個時段處於空閒狀態的概率。 (7 分)

(ii) 已知該客戶服務中心至多在 2 個時段處於空閒狀態，求該客戶服務中心恰好在 2 個時段處於繁忙狀態的概率。

11. 某公司的兩個項目 X 及 Y 同時開始運作。該公司的經理分別用下式模擬 X 及 Y 所產生的收入的變率(以每年百萬元為單位)：

$$f(t) = \ln(\sqrt{t+2} + 5) \quad \text{及} \quad g(t) = \frac{2}{\sqrt{t+1}},$$

其中 t (≥ 0) 是自該兩個項目開始運作起計所經過的年數。將 X 在首 2 年所產生的總收入記為 α 百萬元。設 α_1 為利用梯形法則將區間分成 5 個子區間對 α 的估計。

- (a) (i) 求 α_1 。

(ii) 判斷估計值 α_1 是過高還是過低。試解釋你的答案。 (6 分)

(b) 設 β 百萬元為 Y 在首 2 年所產生的總收入。

(i) 利用代換 $u = \ln(\sqrt{t} + 1)$ ，求 β 。

(ii) 該經理宣稱 X 在首 2 年所產生的總收入超過 X 與 Y 在首 2 年所產生的總收入之和的 $\frac{3}{5}$ 。你是否同意？試解釋你的答案。 (6 分)

12. 在一實驗中，某樣本中細菌的數目可用下式模擬：

$$N = \frac{600}{a + b e^{-kt}},$$

其中 a 、 b 及 k 都是正常數，且 $t (\geq 0)$ 是自實驗開始起計所經過的時數。

實驗開始時細菌的數目是 50，而經過一段很長的時間後細菌的數目會增加至 120。

- (a) 將 $\ln \frac{600-aN}{bN}$ 表示為 t 的線性函數。 (2 分)

(b) 求 a 及 b 。 (2 分)

(c) 已知在 (a) 部中所得的線性函數的圖像通過 $(4, -2)$ 。

(i) 求 k 。

(ii) 求 $\frac{dN}{dt}$ 。

(iii) 設 h 為一常數。對於所有 $t \geq 0$ ， $\frac{dN}{dt} \leq \left. \frac{dN}{dt} \right|_{t=h}$ 。

某人宣稱由實驗開始時至時間 $t = h$ 期間細菌的數目增加多於 10%。該宣稱是否正確？試解釋你的答案。

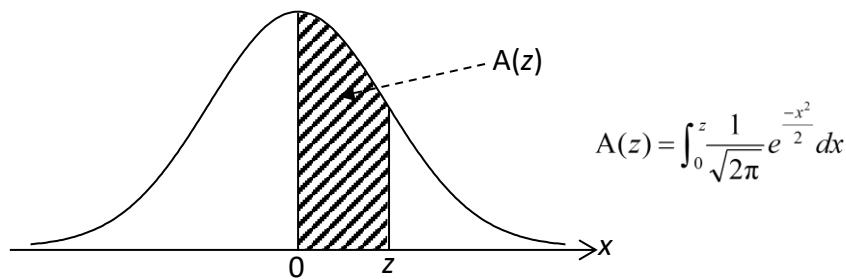
(9 分)

標準正態分佈表

<i>z</i>	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

註： 本表所列數字為標準正態曲線下由 $x = 0$ 至 $x = z$ ($z \geq 0$) 之間的面積。

負值 z 所對應的面積可利用對稱性求得。



- 試卷完 -